



TITLE:

# MATLABとINTLABによる精度保証 付き数値計算とその応用 (数学ソフト ウェアと教育: 数学ソフトウェア の効果的利用に関する研究)

AUTHOR(S):

小林, 健太

---

CITATION:

小林, 健太. MATLABとINTLABによる精度保証付き数値計算とその応用 (数学ソフトウェアと教育: 数学ソフトウェアの効果的利用に関する研究). 数理解析研究所講究録 2013, 1865: 154-163

ISSUE DATE:

2013-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/195367>

RIGHT:

## MATLAB と INTLAB による 精度保証付き数値計算とその応用

一橋大学・商学研究科 小林 健太 (Kenta Kobayashi)  
Graduate School of Commerce and Management,  
Hitotsubashi University

### 1 精度保証付き数値計算

近年、精度保証付き数値計算が注目を集めている。精度保証付き数値計算とは、数値計算において生じる打ち切り誤差や丸め誤差等を厳密に評価することによって、計算機を用いながら数学的に厳密な結果を得る手法全般を言い、様々な問題に応用されている。精度保証付き数値計算においては区間演算が本質的な役割を果たす。区間とは、実数上の閉区間

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

のことで、2つの区間  $X, Y$  に対し、記号  $*$  を  $+, -, \cdot, /$  のいずれかとするとき、区間に対する2項演算  $*$  を次で定義する:

$$X * Y = \{x * y \mid x \in X, y \in Y\}$$

実際の計算では、区間の上限と下限は浮動小数点の丸め誤差を評価して厳密に解を包み込むように計算される。計算機上で精度保証付き数値計算を実現するには様々な方法があるが、可搬性やプログラミングのし易さを考えると、ハンブルク工科大学の Rump 氏によって開発された INTLAB を用いるのが簡単である。INTLAB は MATLAB の toolbox として開発されており、MATLAB に追加してインストールすることにより、精度保証付き数値計算を実現することができる。INTLAB による精度保証付き数値計算および区間演算については、[16, 21] が詳しい。

実際の数値計算においては、演算を区間演算に置き換えただけでは計算が上手く行かないことが多いので、上手く精度保証を実現するために様々な手法が開発されている。簡単な例だと、例えば連立一次方程式

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^n$$

を区間演算を用いて Gauss の消去法で解くと、 $n$  が大きいときには計算の途中で区間がどんどん広がってしまい、上手く計算できない。しかし、 $A$  の近似逆行列  $R$  を（区間演算を用いない）普通の方法で求めておき、 $\|I - RA\| < 1$  が成り立つならば、真の解  $\hat{x}$  と任意の  $x$  に対して

$$\|x - \hat{x}\| \leq \frac{\|R(b - Ax)\|}{1 - \|I - RA\|}$$

が成り立つことが示されるので（ここで  $\|\cdot\|$  は任意のノルム），右辺を区間演算で計算すれば  $x$  の精度保証が実現できる．

現在，精度保証付き数値計算の理論は，連立一次方程式の解の高速精度保証や固有値・固有ベクトルの精度保証などの，線形計算に対する精度保証，力学系における軌道の存在検証，アトラクタの存在検証などの，常微分方程式に対する精度保証，非線形楕円型方程式の定常解の存在と一意性の検証などの，偏微分方程式に対する精度保証など，様々な分野に応用が広がっている．また，我々の研究により，30 年来の未解決問題であった Stokes 極限波の一意性についても，精度保証付き数値計算により証明されている [11]．

## 2 三角形上の補間誤差定数の上界評価への応用

前章では，精度保証付き数値計算の様々な応用について紹介したが，本章以降では，三角形上の補間誤差定数の上界評価への応用について概略を述べる．

二次元平面上の三角形  $T$  に対し，関数空間  $V^{1,1}(T), V^{1,2}(T), V^2(T)$  を以下のように定義する：

$$\begin{aligned} V^{1,1}(T) &= \left\{ \varphi \in H^1(T) \mid \int_T \varphi \, dx dy = 0 \right\}, \\ V^{1,2}(T) &= \left\{ \varphi \in H^1(T) \mid \int_{\gamma_k} \varphi \, ds = 0, \quad k = 1, 2, 3 \right\}, \\ V^2(T) &= \left\{ \varphi \in H^2(T) \mid \varphi(p_k) = 0, \quad k = 1, 2, 3 \right\}. \end{aligned}$$

ここで， $p_1, p_2, p_3$  は  $T$  の頂点， $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  は  $T$  の辺である．また， $|\cdot|_{H^2}$  は  $H^2$  セミノルムを意味し，

$$|u|_{H^2(\Omega)}^2 = \|u_{xx}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|u_{xy}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_{yy}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

で定義される．このとき，以下の定数  $C_1(T), C_2(T), C_3(T), C_4(T)$  が存在する：

$$\begin{aligned} C_1(T) &= \sup_{\varphi \in V^{1,1}(T) \setminus 0} \frac{\|\varphi\|_{L^2(T)}}{\|\nabla \varphi\|_{L^2(T)}}, \\ C_2(T) &= \sup_{\varphi \in V^{1,2}(T) \setminus 0} \frac{\|\varphi\|_{L^2(T)}}{\|\nabla \varphi\|_{L^2(T)}}, \\ C_3(T) &= \sup_{\varphi \in V^2(T) \setminus 0} \frac{\|\varphi\|_{L^2(T)}}{|\varphi|_{H^2(T)}}, \\ C_4(T) &= \sup_{\varphi \in V^2(T) \setminus 0} \frac{\|\nabla \varphi\|_{L^2(T)}}{|\varphi|_{H^2(T)}}. \end{aligned}$$

これらの定数は補間誤差定数と呼ばれ，三角形メッシュ上の補間誤差の見積もりや，有限要素法における誤差評価に極めて重要な役割を果たしている [1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 13, 14, 17]．応用上は  $C_1(T) \sim C_4(T)$  の上からの評価が重要であり，現在までの様々な研究がなされている [1, 2, 3, 9, 12, 14, 15, 17, 18, 19, 22]．

それに対して我々は、精度保証付き数値計算を用いることで以下のような公式を証明することができた:

**主定理** 三角形  $T$  の三辺の長さを  $A, B, C$ , 面積を  $S$  とするとき, 以下の不等式が成り立つ:

$$C_1(T) < K_1(T) = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{28} - \frac{S^4}{A^2 B^2 C^2}}, \quad (1)$$

$$C_2(T) < K_2(T) = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{54} - \frac{S^4}{2A^2 B^2 C^2}}, \quad (2)$$

$$C_3(T) < K_3(T) = \sqrt{\frac{A^2 B^2 + B^2 C^2 + C^2 A^2}{83} - \frac{1}{24} \left( \frac{A^2 B^2 C^2}{A^2 + B^2 + C^2} + S^2 \right)}, \quad (3)$$

$$C_4(T) < K_4(T) = \sqrt{\frac{A^2 B^2 C^2}{16S^2} - \frac{A^2 + B^2 + C^2}{30} - \frac{S^2}{5} \left( \frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} + \frac{1}{C^2} \right)}. \quad (4)$$

これらの公式は, ほとんどの三角形について, 今までに得られてきたどのような公式と比べても精度が良く, しかも三角形の頂点の座標が与えられれば四則演算と一回の平方根計算だけで値が求まるので, 使い易さという点でも有利である. 我々は, 理論解析と精度保証付き数値計算を併用することにより, これらの公式が**任意の三角形で成立する**ということを証明した.

### 3 証明の準備

三角形  $T$  に対して  $p_1(T), p_2(T), p_3(T)$  を  $T$  の頂点とする. また,  $\gamma_1(T), \gamma_2(T), \gamma_3(T)$  を  $T$  の三辺とする. さらに,  $\partial T$  上の外向き単位法線ベクトルを  $n(T)$ ,  $\partial T$  に沿って反時計回りに取った方向ベクトルを  $\nu(T)$ ,  $\partial T$  上の線要素を  $ds(T)$  をとする. 以降, 混乱の恐れが無い場合には“( $T$ )”は省略する. 三点  $(0, 0), (1, 0), (a, b)$  を頂点とする三角形を  $T_{a,b}$  と書く. 我々の提案する公式はスケール不変性があるので,

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{(1-a)^2 + b^2} \leq 1$$

の範囲の  $T_{a,b}$  において公式を証明すれば, 全ての三角形について証明したことになる. 更に, より条件を緩くし

$$0 \leq a \leq \frac{1}{2}, 0 < b \leq 1$$

の範囲で考えれば十分である.

主定理の証明の概略を述べる前に, さらに少し準備をしておく. 三角形  $\tau$  について二種類の二次補間  $\Pi_\tau^{(\alpha)}$  および  $\Pi_\tau^{(\beta)}$  を定義する. まず,  $\tau$  の頂点を  $p_1, p_2, p_3$  とし, 辺を  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  とする. さらに

$$Q_\alpha = \left\{ a_1(x^2 + y^2) + a_2x + a_3y + a_4 \mid a_1, \dots, a_4 \in \mathbb{R} \right\},$$

$$Q_\beta = \left\{ a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_6 \mid a_1, \dots, a_6 \in \mathbb{R} \right\},$$

とする. さて,  $\varphi \in H^1(\tau)$  に対して補間  $\Pi_\tau^{(\alpha)}\varphi$  を,  $\varphi \in H^2(\tau)$  に対して補間  $\Pi_\tau^{(\beta)}\varphi$  をそれぞれ以下のように定める.

$$\begin{cases} \Pi_\tau^{(\alpha)}\varphi \in Q_\alpha \\ \int_{\gamma_k} \Pi_\tau^{(\alpha)}\varphi ds = \int_{\gamma_k} \varphi ds, & k = 1, 2, 3, \\ \iint_\tau \Pi_\tau^{(\alpha)}\varphi dxdy = \iint_\tau \varphi dxdy, \\ \Pi_\tau^{(\beta)}\varphi \in Q_\beta \\ \Pi_\tau^{(\beta)}\varphi(p_k) = u(p_k), & k = 1, 2, 3, \\ \int_{\gamma_k} \nabla \Pi_\tau^{(\beta)}\varphi \cdot n ds = \int_{\gamma_k} \nabla \varphi \cdot n ds, & k = 1, 2, 3. \end{cases}$$

ここで,  $ds$  は边上の線要素,  $n$  は外向き単位法線ベクトルとする. 自由度の数と拘束条件の数が等しいので, この補間は一意に定まる. このとき,  $\Pi_\tau^{(\alpha)}$  および  $\Pi_\tau^{(\beta)}$  は, ある意味での直交射影となり, 以下の二式が成り立つ:

$$\|\nabla \Pi_\tau^{(\alpha)}\varphi\|_{L^2(\tau)}^2 + \|\nabla(\varphi - \Pi_\tau^{(\alpha)}\varphi)\|_{L^2(\tau)}^2 = \|\nabla \varphi\|_{L^2(\tau)}^2, \quad (5)$$

$$|\Pi_\tau^{(\beta)}\varphi|_{H^2(\tau)}^2 + |\varphi - \Pi_\tau^{(\beta)}\varphi|_{H^2(\tau)}^2 = |\varphi|_{H^2(\tau)}^2. \quad (6)$$

この二式は Gauss の発散定理を用いて示すことができる.

## 4 証明の概略

三角形  $T$  を図 1 のように  $n^2$  個の相似な小三角形  $\tau_1, \dots, \tau_{n^2}$  に分割する. ただし  $\tau_k$  は開集合とし, 境界は含めないものとする. さらに

$$T' = \bigcup_{k=1}^{n^2} \tau_k$$

と置く. ここで,  $u \in V^{1,1}(T)$  もしくは  $u \in V^{1,2}(T)$  に対して  $\Pi^{(\alpha)}u$  を,  $u \in V^2(T)$  に対して  $\Pi^{(\beta)}u$  を以下のように定める:

$$\Pi^{(\alpha)}u(x, y) = \Pi_{\tau_k}^{(\alpha)}u(x, y), \quad k = \min\{j \mid (x, y) \in \overline{\tau_j}\},$$

$$\Pi^{(\beta)}u(x, y) = \Pi_{\tau_k}^{(\beta)}u(x, y), \quad k = \min\{j \mid (x, y) \in \overline{\tau_j}\}.$$

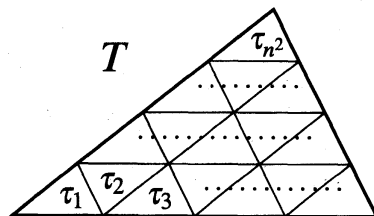


図 1: 相似な  $n^2$  個の小三角形への分割

ここで,  $\Pi^{(\alpha)}u$  および  $\Pi^{(\beta)}u$  は  $T$  上で連続とは限らないことに注意する.

さて, 有限次元固有値問題を解くことにより

$$\begin{aligned} D_1^{(n)}(T) &= \sup_{u \in V^{1,1}(T) \setminus \{0\}} \frac{\|\Pi^{(\alpha)}u\|_{L^2(T')}^2}{\|\nabla \Pi^{(\alpha)}u\|_{L^2(T')}^2}, & D_2^{(n)}(T) &= \sup_{u \in V^{1,2}(T) \setminus \{0\}} \frac{\|\Pi^{(\alpha)}u\|_{L^2(T')}^2}{\|\nabla \Pi^{(\alpha)}u\|_{L^2(T')}^2}, \\ D_3^{(n)}(T) &= \sup_{u \in V^2(T) \setminus \{0\}} \frac{\|\Pi^{(\beta)}u\|_{L^2(T')}^2}{|\Pi^{(\beta)}u|_{H^2(T')}^2}, & D_4^{(n)}(T) &= \sup_{u \in V^2(T) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla \Pi^{(\beta)}u\|_{L^2(T')}^2}{|\Pi^{(\beta)}u|_{H^2(T')}^2}, \end{aligned}$$

を満たす  $D_1^{(n)}(T), D_2^{(n)}(T), D_3^{(n)}(T), D_4^{(n)}(T)$  を求めることができる. このとき (5) を用いると,  $u \in V^{1,j}(T)$ ,  $j = 1, 2$  に対して

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(T)}^2 &\leq \left( \|\Pi^{(\alpha)}u\|_{L^2(T')} + \|u - \Pi^{(\alpha)}u\|_{L^2(T')} \right)^2 \\ &= \left( \|\Pi^{(\alpha)}u\|_{L^2(T')} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n^2} \|u - \Pi_{\tau_k}^{(\alpha)}u\|_{L^2(\tau_k)}^2} \right)^2 \\ &\leq \left( \sqrt{D_j^{(n)}(T)} \|\nabla \Pi^{(\alpha)}u\|_{L^2(T')} + \frac{C_j(T)}{n} \sqrt{\sum_{k=1}^{n^2} \|\nabla(u - \Pi_{\tau_k}^{(\alpha)}u)\|_{L^2(\tau_k)}^2} \right)^2 \\ &\leq \left( D_j^{(n)}(T) + \frac{C_1(T)^2}{n^2} \right) \left( \|\nabla \Pi^{(\alpha)}u\|_{L^2(T')}^2 + \sum_{k=1}^{n^2} \|\nabla(u - \Pi_{\tau_k}^{(\alpha)}u)\|_{L^2(\tau_k)}^2 \right) \\ &= \left( D_j^{(n)}(T) + \frac{C_1(T)^2}{n^2} \right) \sum_{k=1}^{n^2} \left( \|\nabla \Pi_{\tau_k}^{(\alpha)}u\|_{L^2(\tau_k)}^2 + \|\nabla(u - \Pi_{\tau_k}^{(\alpha)}u)\|_{L^2(\tau_k)}^2 \right) \\ &= \left( D_j^{(n)}(T) + \frac{C_j(T)^2}{n^2} \right) \sum_{k=1}^{n^2} \|\nabla u\|_{L^2(\tau_k)}^2 \\ &= \left( D_j^{(n)}(T) + \frac{C_j(T)^2}{n^2} \right) \|\nabla u\|_{L^2(T)}^2, \end{aligned}$$

また, (6) を用いると  $u \in V^2(T)$  に対して

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(T)}^2 &\leq \left( \|\Pi^{(\beta)}u\|_{L^2(T')} + \|u - \Pi^{(\beta)}u\|_{L^2(T')} \right)^2 \\ &= \left( \|\Pi^{(\beta)}u\|_{L^2(T')} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n^2} \|u - \Pi_{\tau_k}^{(\beta)}u\|_{L^2(\tau_k)}^2} \right)^2 \\ &\leq \left( \sqrt{D_3^{(n)}(T)} |\Pi^{(\beta)}u|_{H^2(T')} + \frac{C_3(T)}{n^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n^2} |u - \Pi_{\tau_k}^{(\beta)}u|_{H^2(\tau_k)}^2} \right)^2 \\ &\leq \left( D_3^{(n)}(T) + \frac{C_3(T)^2}{n^4} \right) \left( |\Pi^{(\beta)}u|_{H^2(T')}^2 + \sum_{k=1}^{n^2} |u - \Pi_{\tau_k}^{(\beta)}u|_{H^2(\tau_k)}^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( D_3^{(n)}(T) + \frac{C_3(T)^2}{n^4} \right) \sum_{k=1}^{n^2} \left( |\Pi_{\tau_k}^{(\beta)} u|_{H^2(\tau_k)}^2 + |u - \Pi_{\tau_k}^{(\beta)} u|_{H^2(\tau_k)}^2 \right) \\
&= \left( D_3^{(n)}(T) + \frac{C_3(T)^2}{n^4} \right) \sum_{k=1}^{n^2} |u|_{H^2(\tau_k)}^2 \\
&= \left( D_3^{(n)}(T) + \frac{C_3(T)^2}{n^4} \right) |u|_{H^2(T)}^2,
\end{aligned}$$

$u \in V^2(T)$  に対して

$$(u - \Pi_{\tau_k}^{(\beta)} u)_x, (u - \Pi_{\tau_k}^{(\beta)} u)_y \in V^{1,2}(\tau_k)$$

であることと (6) を用いると

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|_{L^2(T)}^2 &\leq \left( \|\nabla \Pi^{(\beta)} u\|_{L^2(T')} + \|\nabla(u - \Pi^{(\beta)} u)\|_{L^2(T')} \right)^2 \\
&= \left( \|\nabla \Pi^{(\beta)} u\|_{L^2(T')} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n^2} \left( \|(u - \Pi_{\tau_k}^{(\beta)} u)_x\|_{L^2(\tau_k)}^2 + \|(u - \Pi_{\tau_k}^{(\beta)} u)_y\|_{L^2(\tau_k)}^2 \right)} \right)^2 \\
&\leq \left( \sqrt{D_4^{(n)}(T)} |\Pi^{(\beta)} u|_{H^2(T')}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{C_2(T)}{n} \sqrt{\sum_{k=1}^{n^2} \left( \|\nabla(u - \Pi_{\tau_k}^{(\beta)} u)_x\|_{L^2(\tau_k)}^2 + \|\nabla(u - \Pi_{\tau_k}^{(\beta)} u)_y\|_{L^2(\tau_k)}^2 \right)} \right)^2 \\
&= \left( \sqrt{D_4^{(n)}(T)} |\Pi^{(\beta)} u|_{H^2(T')}^2 + \frac{C_2(T)}{n} \sqrt{\sum_{k=1}^{n^2} |u - \Pi_{\tau_k}^{(\beta)} u|_{H^2(\tau_k)}^2} \right)^2 \\
&\leq \left( D_4^{(n)}(T) + \frac{C_2(T)^2}{n^2} \right) \left( |\Pi^{(\beta)} u|_{H^2(T')}^2 + \sum_{k=1}^{n^2} |u - \Pi_{\tau_k}^{(\beta)} u|_{H^2(\tau_k)}^2 \right) \\
&= \left( D_4^{(n)}(T) + \frac{C_2(T)^2}{n^2} \right) \sum_{k=1}^{n^2} \left( |\Pi_{\tau_k}^{(\beta)} u|_{H^2(\tau_k)}^2 + |u - \Pi_{\tau_k}^{(\beta)} u|_{H^2(\tau_k)}^2 \right) \\
&= \left( D_4^{(n)}(T) + \frac{C_2(T)^2}{n^2} \right) \sum_{k=1}^{n^2} |u|_{H^2(\tau_k)}^2 \\
&= \left( D_4^{(n)}(T) + \frac{C_2(T)^2}{n^2} \right) |u|_{H^2(T)}^2,
\end{aligned}$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned}
C_1(T)^2 &\leq D_1^{(n)}(T) + \frac{C_1(T)^2}{n^2}, & C_2(T)^2 &\leq D_2^{(n)}(T) + \frac{C_2(T)^2}{n^2}, \\
C_3(T)^2 &\leq D_3^{(n)}(T) + \frac{C_3(T)^2}{n^4}, & C_4(T)^2 &\leq D_4^{(n)}(T) + \frac{C_2(T)^2}{n^2},
\end{aligned}$$

が成り立つので

$$\begin{aligned} C_1(T)^2 &\leq \frac{n^2}{n^2-1} D_1^{(n)}(T), & C_2(T)^2 &\leq \frac{n^2}{n^2-1} D_2^{(n)}(T), \\ C_3(T)^2 &\leq \frac{n^4}{n^4-1} D_3^{(n)}(T), & C_4(T)^2 &\leq D_4^{(n)}(T) + \frac{C_2(T)^2}{n^2}, \end{aligned}$$

が得られる。以上により、無限次元固有値問題の解を、有限次元一般化固有値問題の解を用いて評価することができる。この関係を用いて、与えられた三角形について公式(1)～(4)の成立を示すことができる。

## 5 INTLABによる精度保証付き数値計算

本章では、前章で述べた有限次元一般化固有値問題の固有値を上から評価する方法について述べる。具体的には、実対称行列  $A$  および実対称正定値行列  $B$  に対し、

$$\lambda = \sup_{x \in \mathbb{R} \setminus 0} \frac{x^T A x}{x^T B x}$$

の上界を厳密に評価することができればよい。ここで、

$$\lambda' > \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad B - \lambda' A \text{ is positive definite}$$

であるから、結局、与えられた実数が有限次元一般化固有値問題の固有値の上界になることを示すには、実対称行列の正定値性を示せばよいことになる。実際の正定値性の検証には精度保証付き数値計算を用いる。INTLABにおいて与えられた行列の正定値性を検証するには、関数 `isspd()` を用いる。各成分が区間で与えられている対称な区間行列

$$A = \left( [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}] \right) = \left\{ Y = (y_{ij}) \mid y_{ij} \in [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}], y_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

について、`isspd(A)=1` であれば、 $A$ に含まれる全ての実対称行列は正定値であることが厳密に検証されたことになる。正定値であることが検証できなかった場合には `isspd(A)=0` となる。関数 `isspd()` の内部で用いられているアルゴリズムについては[20]を参照のこと。

以上の方法により、任意の与えられた三角形については定数の上界を検証することが可能になった。どれだけ時間をかけたとしても計算機が扱えるのは有限個の三角形だけなので、このままでは**すべての三角形**について公式を証明することはできないが、我々は、漸近解析と、ある種の連続化テクニック（ある三角形について公式が少し厳しい形で証明することで、それと形が近い三角形についても公式の成立を示す）により、全ての三角形について公式を証明することができた。



## 6 数値計算結果

得られた公式の精度を確認するため,  $C_1(T), C_2(T), C_3(T), C_4(T)$  の十分精度の良い近似解として

$$\begin{aligned}\tilde{C}_1(T) &= \sqrt{D_1^{(100)}(T)}, & \tilde{C}_2(T) &= \sqrt{D_2^{(100)}(T)}, \\ \tilde{C}_3(T) &= \sqrt{D_3^{(100)}(T)}, & \tilde{C}_4(T) &= \sqrt{D_4^{(100)}(T)}\end{aligned}$$

を求め, 公式と比較した. 結果を下の図に示す. ここで, 三角形  $T$  は  $(0, 0), (1, 0), (a, b)$  の三点を頂点に持つものとする. 我々の公式はスケール不変性を持つので,  $0 \leq a \leq 0.5$ ,  $0 < b \leq 1$  の範囲で成り立てば, 全ての三角形で成り立つことが言える. 図 3, 図 5, 図 7, 図 9 のゼロに近いグラフが近似解と我々の公式との誤差である (グラフは  $0.05 \leq b \leq 1$  の範囲を表示していることに注意). 我々の公式が, 理論値の良い上界になっていることがわかる.

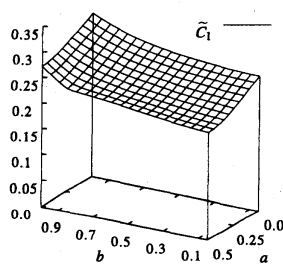


図 2:  $\tilde{C}_1(T)$

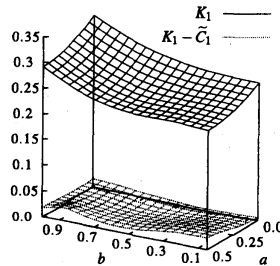


図 3:  $K_1$  および  
 $K_1(T) - \tilde{C}_1(T)$

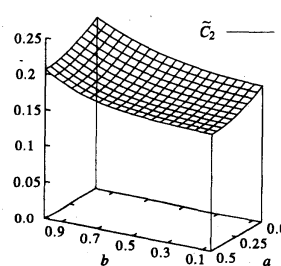


図 4:  $\tilde{C}_2(T)$

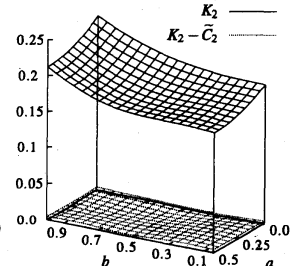


図 5:  $K_2$  および  
 $K_2(T) - \tilde{C}_2(T)$

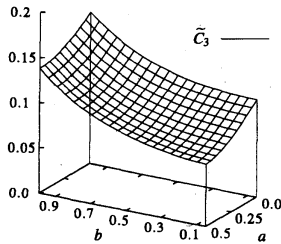


図 6:  $\tilde{C}_3(T)$

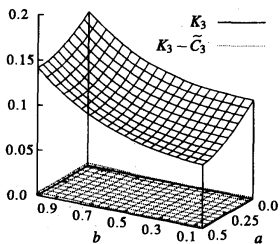


図 7:  $K_3$  および  
 $K_3(T) - \tilde{C}_3(T)$

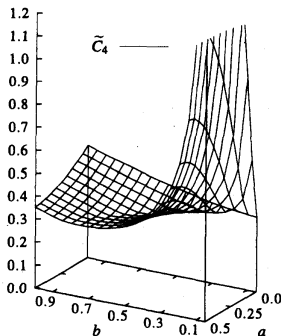


図 8:  $\tilde{C}_4(T)$

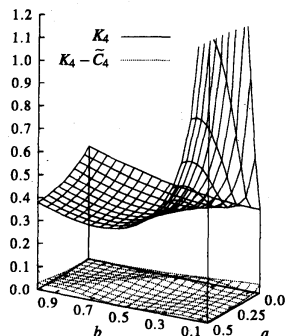


図 9:  $K_4$  および  
 $K_4(T) - \tilde{C}_4(T)$

## 7 結論

応用上重要な、三角形上の補間誤差定数を上から精密に評価する公式を提案し、精度保証付き数値計算の助けを借りて証明した。精度保証付き数値計算を実行するに際しては、MATLABのtoolboxとして開発されたINTLABを用いた。

## 参考文献

- [1] Arbenz, P., Computable finite element error bounds for Poisson's equation, *IMA Journal of Numerical Analysis*, **2** (1982), 475–479.
- [2] Arcangeli, R. & Gout, J. L., Sur l'évaluation de l'erreur d'interpolation de Lagrange dans un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , *R.A.I.R.O. Analyse Numérique*, **10** (1976), 5–27.
- [3] Babuška, I. & Aziz, A. K., On the angle condition in the finite element method, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **13** (1976), 214–226 .
- [4] Babuška, I. & Strouboulis, T., *The Finite Element Method and Its Reliability*. Clarendon Press, (2001).
- [5] Brenner, S. C. & Scott, L. R., *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, (2002).
- [6] Brezzi, F. & Fortin, M., *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Berlin: Springer, (1991).
- [7] Ciarlet, P. G., *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. SIAM, (2002).
- [8] Eriksson, K., Estep, D., Hansbo, P. & Johnson, C., *Computational Differential Equations*. Cambridge: Cambridge University Press, (1996).
- [9] Kikuchi, F. & Liu, X., Estimation of interpolation error constants for the  $P_0$  and  $P_1$  triangular finite elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **196** (2007), 3750–3758.
- [10] Knabner, P. & Angermann, L., *Numerical Methods for Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations*, Berlin: Springer, 2003.
- [11] Kobayashi, K., On the global uniqueness of Stokes' wave of extreme form, *IMA Journal of Applied Mathematics*, **75** (2010), 647–675.
- [12] Laugesen, R. S. & Siudeja, B. A., Minimizing Neumann fundamental tones of triangles: An optimal Poincar inequality, *J. Differential Equations*, **249** (2010), 118–135.

- [13] Lehmann, R., Computable error bounds in finite-element method, *IMA Journal of Numerical Analysis*, **6** (1986), 265–271 .
- [14] Liu, X. & Kikuchi, F., Analysis and estimation of error constants for  $P_0$  and  $P_1$  interpolations over triangular finite elements, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, **17** (2010), 27–78.
- [15] Meinguet, J. & Descloux, J., An operator-theoretical approach to error estimation, *Numer. Math.*, **27** (1977), 307–326.
- [16] Moore, R. E., Kearfott, R. B., & Cloud, M. J., *Introduction To Interval Analysis*, Cambridge Univ. Press, 2009.
- [17] Nakao, M. T. & Yamamoto, N., A guaranteed bound of the optimal constant in the error estimates for linear triangular element, *Computing Supplementum*, **15** (2001), 163–173.
- [18] Natterer, F., Berechenbare Fehlerschranken für die Methode der finite Elemente, *International Series of Numerical Mathematics*, **28** (1975), 109–121.
- [19] Payne, L. E. & Weinberger, H. F., An optimal Poincaré inequality for convex domains, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **5** (1960), 286–292.
- [20] Rump, S. M., Verification of positive definiteness, *BIT Numer. Math.*, **46** (2006), 433–452.
- [21] Rump, S. M., Verification methods: Rigorous results using floating-point arithmetic, *Acta Numerica*, **19** (2010), 287–449.
- [22] Zlámal, M., On the Finite Element Method, *Numerische Mathematik*, **12** (1968), 394–409.